YÜZEYLER TEORİSİ FİNAL SINAVI (31.12.2019)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) a) Şekil çizerek Gauss Dönüşümünün tanımını yapınız**(10P).**

b) E^n de bir hiperyüzey M, $\eta : M \to S^{n-1}$ Gauss dönüşümü ve S de M nin şekil operatörü olmak üzere $\eta_* = S$(yani S, M nin Gauss dönüşümünün Jakobien dönüşümüdür) olduğunu gösteriniz(1**0P.**).

2.) E^3 de $M = S^2$ yüzeyinin temel formlarını bulunuz(**(20P.)**.

3.) E^3 de M, denklemi $x_1^2 + x_2^2 = 1$ olan silindir ve M üzerindeki α eğrisi de $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha : I \to M,\ \alpha(t) = (\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ ct+b)$$

ile verilmiş olsun. α eğrisinin silindir üzerinde bir geodezik olup olmadığını araştırınız **(20P.)**.

4.) $Z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - 2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki, bu nokta $(0, 1, 0)$ noktasına en yakın nokta olsun(Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanılacak) **(20P.)**.

5.) $M_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 4 \} \subset E^3$, $M_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0 \} \subset E^3$ yüzeylerinin arakesiti olan eğrinin $Q = (1, \sqrt{3}, ?)$ noktasındaki eğriliklerini bulunuz **(20P.)**.

NOT: Sorular eşit puanlı olup, süre 90 dakikadır. Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

CEVAPLAR

C-1) a) E^n de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin diferansiyellenebilir birim normal vektör alanı

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

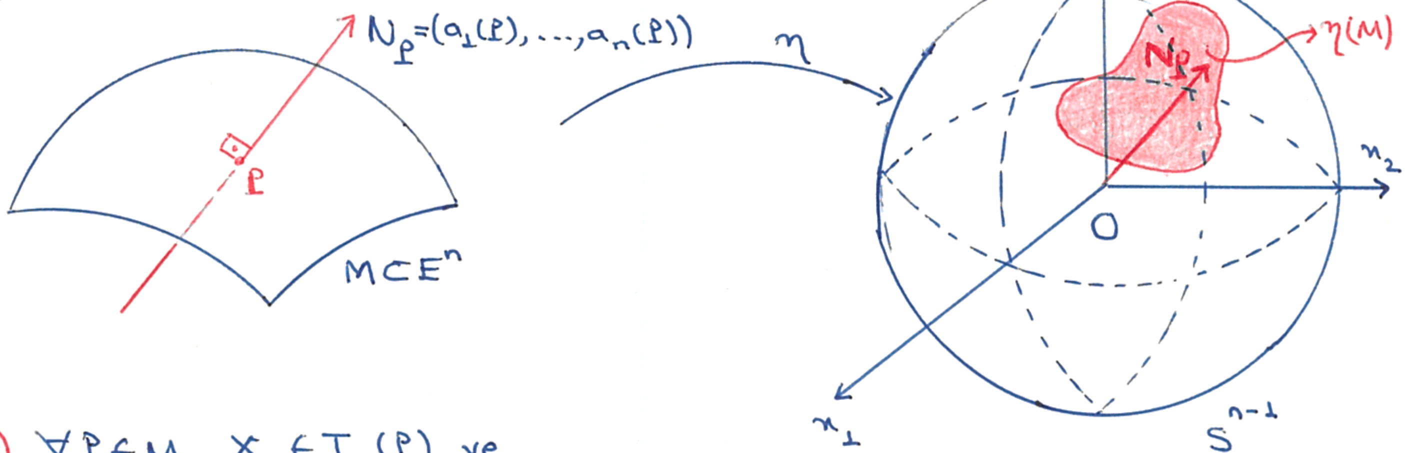
olsun.

$$S^{n-1} = \{ X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \}$$

birim küre olmak üzere

$$\eta : M \longrightarrow S^{n-1} \subset E^n$$
$$P \longrightarrow \eta(P) = \overrightarrow{N}_P = \sum_{i=1}^{n} a_i(P) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlanan η dönüşümüne M hiperyüzeyinin Gauss dönüşümü denir. $\| N_P \| = 1$ olduğundan dolayı, açık olarak η dönüşümü M yi E^n deki S^{n-1} birim küresine resmeder. Burada η dönüşümü 1:1 ve örten değildir. Dolayısı ile $\eta(M)$ kümesi kürenin tamamını kapsayacağı gibi tek bir noktadan da oluşabilir.



b) $\forall P \in M$, $X_P \in T_M(P)$ ve
$\eta = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ için

$$\eta_*\big|_P (X_P) = \sum_{i=1}^{n} X_P[f_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\eta(P)} = (X_P[f_1], \ldots, X_P[f_n])_{\eta(P)} \quad \ldots (1)$$

yazılabilir. $\eta\big|_P = (f_1(P), \ldots, f_n(P)) = \overrightarrow{N}_P$ olduğundan ve şekil operatörü tanımından

$$S_P(X_P) = D_{X_P} N = (X_P[f_1], \ldots, X_P[f_n]) \quad \ldots (2)$$

bulunur. (1) ve (2) eşitliklerinden

$$\eta_*\big|_P (X_P) = S_P(X_P)$$

elde edilir. O halde, $\forall X_P \in T_M(P)$, $\forall P \in M$ için

$$\eta_* = S$$

elde edilir.

C-2) Önce yüzeyin şekil operatörünü bulalım:

$M = S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=r^2\}$ yüzeyi E^3 de O merkezli r yarıçaplı küredir.

Yüzeyin tanımında kullanılan fonksiyon,

$$f : E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-r^2 = 0$$

olduğundan, $\overrightarrow{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$ yüzeyin normalidir.

$\| \overrightarrow{\nabla f} \| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2r$ olduğundan, yüzeyin birim normali,

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \left(\frac{1}{r}x, \frac{1}{r}y, \frac{1}{r}z\right).$$

$$S(X) = D_X N = \left(X[\tfrac{1}{r}x], X[\tfrac{1}{r}y], X[\tfrac{1}{r}z]\right).$$

$\vec{V}_p[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p$ olduğunu Dif. Geo. I den biliyoruz.

$X = (x_1, x_2, x_3)$ olsun.

$$X[\tfrac{1}{r}x] = \langle X, \nabla(\tfrac{1}{r}x)\rangle = \langle (x_1,x_2,x_3), (\tfrac{1}{r},0,0)\rangle = \tfrac{1}{r}x_1,$$

$$X[\tfrac{1}{r}y] = \langle X, \nabla(\tfrac{1}{r}y)\rangle = \langle (x_1,x_2,x_3), (0,\tfrac{1}{r},0)\rangle = \tfrac{1}{r}x_2,$$

$$X[\tfrac{1}{r}z] = \tfrac{1}{r}X[z] = \tfrac{1}{r}\langle (x_1,x_2,x_3), (0,0,1)\rangle = \tfrac{1}{r}x_3.$$

$$\Rightarrow S(X) = \left(\tfrac{1}{r}x_1, \tfrac{1}{r}x_2, \tfrac{1}{r}x_3\right) = \tfrac{1}{r}(x_1,x_2,x_3) = \tfrac{1}{r}X.$$

S şekil operatörünün matrisi $\mathcal{S}$ olmak üzere,

$$S(X) = \mathcal{S}X = \tfrac{1}{r}X = \tfrac{1}{r}I(X)$$

$\Rightarrow \mathcal{S} = \frac{1}{r}I_2$ dir. Dolayısıyla,

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1/r \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece,

1. temel form : $I(X,Y) = \langle X,Y\rangle$,

2. temel form: $II(X,Y) = \langle S(X),Y\rangle = \frac{1}{r}\langle X,Y\rangle$,

3. temel form: $III(X,Y) = \langle S^2(X),Y\rangle = \langle S(X),S(Y)\rangle = \frac{1}{r^2}\langle X,Y\rangle$

bulunur.

c - 3) $\alpha'(t) = (-a\sin(at+b),\ a\cos(at+b),\ c)$

$\alpha''(t) = (-a^2\cos(at+b),\ -a^2\sin(at+b),\ 0)$

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$

$$\Rightarrow N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{\cancel{2}(x_1, x_2, 0)}{\cancel{2}\sqrt{\underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{1}}}$$

$$\Rightarrow N = (x_1, x_2, 0).$$

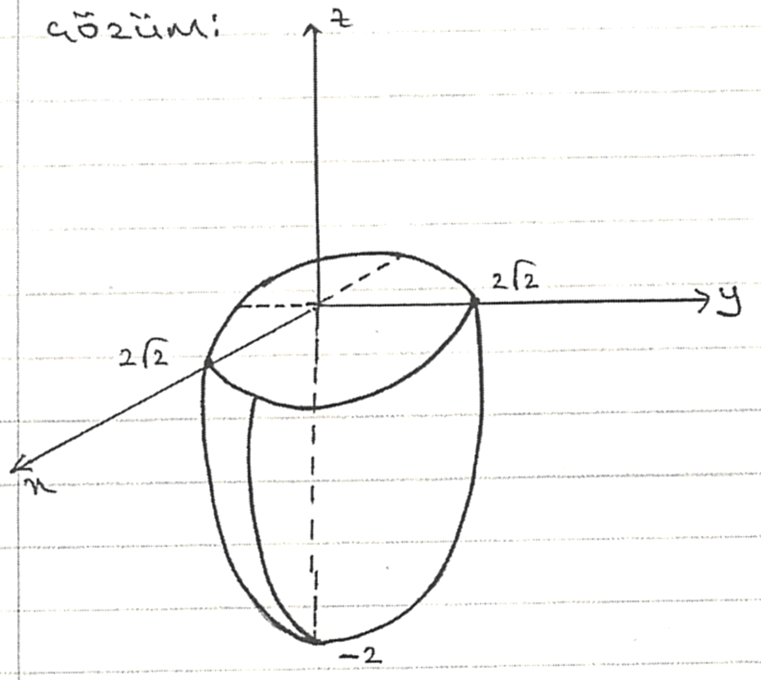
$$\Rightarrow N\Big|_{\alpha(t)} = (\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ 0).$$

Buna göre; $\alpha''(t) = -a^2 N\Big|_{\alpha(t)}$ olduğundan $\alpha''(t) \perp T_M(\alpha(t))$.

O halde α eğrisi silindir üzerinde geodezik bir eğridir.

Soru 4) $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki bu nokta $(0,1,0)$ noktasına en yakın nokta olsun (Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanınız).

Çözüm:



$z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2 \Rightarrow z=\frac{x^2+y^2-8}{4}$

$\Rightarrow x^2+y^2-4z-8=0$ bulunur.

Buradan,

$g(x,y,z)=x^2+y^2-4z-8=0$

ve (x,y,z) ile $(0,1,0)$ noktaları arasındaki uzaklık ifadesinden

$f(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+z^2$

yazabiliriz.

$\nabla g=(2x,2y,-4)$,

$\nabla f=(2x,2(y-1),2z)$

olduğundan Lagrange çarpan teoreminden

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

veya buradan

$$(x,y-1,z)=\lambda(x,y,-2)$$

olup, söz konusu noktada

$$\begin{cases} x=\lambda x \\ y-1=\lambda y \\ z=-2\lambda \\ x^2+y^2-4z=8 \end{cases}$$

sağlanmalıdır. Eğer $x\neq 0$ ise $\lambda=1$ olur. Bu ise $y-1=\lambda y$ den $-1=0$ çelişkisini elde ederiz. O halde $x=0$ olmalıdır. $x=0$, $y=\frac{1}{1-\lambda}$, $z=-2\lambda$ değerini son denklemde yerine yazarsak

$$0+\frac{1}{(1-\lambda)^2}-4(-2\lambda)=8 \Rightarrow \frac{1+8\lambda(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)^2}=8$$

$$\Longrightarrow 8\lambda^3-24\lambda^2+24\lambda-7=0$$

1/2	8	−24	24	−7
		4	−10	7
	8	−20	14	0

$\Rightarrow (\lambda-\frac{1}{2})(8\lambda^2-20\lambda+14)=0$

$\Rightarrow (\lambda-\frac{1}{2})(4\lambda^2-10\lambda+7)=0$

$4\lambda^2-10\lambda+7=0$ denkleminin köklerini araştıralım:

$\Delta=b^2-4ac$ den $\Delta=100-4.4.7=-12<0$ olduğundan kökler sanaldır. Buna göre,

$8\lambda^3-24\lambda^2+24\lambda-7=0$ denkleminin yalnız bir reel kökü vardır ve o da $\lambda=\frac{1}{2}$ dir.

Buna göre, f için M üzerinde $z=-1$, $x=0$ ve $x^2+y^2-4z=8$ den $0+y^2-4.(-1)=8 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\mp 2$.

$A_1=(0,-2,-1)$, $A_2=(0,2,-1)$ noktaları kritik noktalardır. $f(A_1)=10$, $f(A_2)=2$ olduğundan; $A_2=(0,2,-1)\in M$ noktası $(0,1,0)$ noktasına M üzerinde en yakın noktadır.

$\lambda=\frac{1}{2}$ için $z=-2\lambda$ dan $z=-2.\frac{1}{2}=-1$

C- 5) $M_1=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2=4\} \subset E^3$,

$M_2=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2-x_2^2-2x_3=0\} \subset E^3$

yüzeylerinin arakesiti olan eğrinin $Q=(1,\sqrt{3},?)$ noktasındaki eğriliklerini bulunuz.

ÇÖZÜM: $x_1^2+x_2^2=4 \Rightarrow x_1=2\cos t,\ x_2=2\sin t$ yazabiliriz.

$x_1^2-x_2^2-2x_3=0 \Rightarrow 4\cos^2 t-4\sin^2 t=2x_3$

$\Rightarrow x_3=2\cos^2 t-2\sin^2 t=2\underbrace{(\cos^2 t-\sin^2 t)}_{\cos 2t}$

$\Rightarrow x_3=2\cos 2t.$

Buna göre; M_1 ve M_2 yüzeylerinin arakesit eğrisinin bir parametrizasyonu

$$\alpha: I \longrightarrow M_1\cap M_2 \subset E^3$$
$$t \longrightarrow \alpha(t)=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 2\cos 2t)$$

dir. Buradan,

$\left.\begin{array}{l} x_1(P)=1 \Rightarrow 1=2\cos t \Rightarrow \cos t=1/2 \\ x_2(P)=\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}=2\sin t \Rightarrow \sin t=\sqrt{3}/2 \end{array}\right\} \Rightarrow t=\frac{\pi}{3}.$

$x_3(P)=2\cos 2.\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{2\pi}{3}=2.\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ dir. O halde,

$Q=(1,\sqrt{3},-1)$ olarak elde edilir.

$\alpha'(t)=(-2\sin t,\ 2\cos t,\ -4\sin 2t) \Rightarrow \alpha'(\pi/3)=(-\sqrt{3},1,-2\sqrt{3})$,

$\alpha''(t)=(-2\cos t,-2\sin t,-8\cos 2t) \Rightarrow \alpha''(\pi/3)=(-1,-\sqrt{3},4)$,

$\alpha'''(t)=(2\sin t,-2\cos t,16\sin 2t) \Rightarrow \alpha'''(\pi/3)=(\sqrt{3},-1,8\sqrt{3})$.

$$k_1(\pi/3)=\frac{\|\alpha'(\pi/3)\times\alpha''(\pi/3)\|}{\|\alpha'(\pi/3)\|^3} \quad \text{ve} \quad k_2(\pi/3)=\frac{\det(\alpha'(\pi/3),\alpha''(\pi/3),\alpha'''(\pi/3))}{\|\alpha'(\pi/3)\times\alpha''(\pi/3)\|^2}$$

formüllerinden $k_1(\pi/3)$ ve $k_2(\pi/3)$ değerlerini hesaplayalım.

$$\alpha'(\pi/3)\times\alpha''(\pi/3)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sqrt{3} & 1 & -2\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & 4 \end{vmatrix}=-2e_1+6\sqrt{3}e_2+4e_3$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(\pi/3)\times\alpha''(\pi/3)\|=\sqrt{(-2)^2+(6\sqrt{3})^2+4^2}=\sqrt{128}=\sqrt{2.64}=8\sqrt{2}.$$

$$\| \alpha'(\pi/3) \| = \sqrt{16} = 4$$

$$\det(\alpha'(\pi/3), \alpha''(\pi/3), \alpha'''(\pi/3)) = \langle \alpha'(\pi/3) \wedge \alpha''(\pi/3), \alpha'''(\pi/3) \rangle$$
$$= \langle (-2, 6\sqrt{3}, 4), (\sqrt{3}, -1, 8\sqrt{3}) \rangle$$
$$= -2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 32\sqrt{3}$$
$$= 24\sqrt{3}.$$

$$k_1(\pi/3) = \frac{8\sqrt{2}}{16 \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{8},$$

$$k_2(\pi/3) = \frac{\cancelto{3}{24}\sqrt{3}}{\cancelto{8}{64} \cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \quad \text{bulunur.}$$